Лекция 5
Тема. Непрерывность функции

План лекции:
1) *Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.*
2) *Свойства функций, непрерывных на множестве.*
3) *Точки разрыва функции и их классификация.*

§1. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x): G \to \mathrm{R}$ называется ***непрерывной*** при $x = x_0$ (в внутренней точке $x_0 \in G$), если:
1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;
2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0 ($\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$)
3) этот предел равен значению функции в точке x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ одной переменной x определена при $x \leqslant x_0$ ($x \geqslant x_0$). Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева* (*справа*) в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \ (\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)).$$

На практике, при выяснении непрерывности функции в точке a, достаточно проверить следующие условия: $\mathbf{x_0 \in G}$, $\mathbf{\exists f(x_0 - 0), \exists f(x_0 + 0)}$, $\mathbf{f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)}$. То есть функция f непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда она в этой точке непрерывна слева и справа, причем её значение в этой точке совпадает с соответствующими односторонними пределами.

Рассмотрим ***свойства*** функций, непрерывных в точке.
Справедливы следующие утверждения:

I. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.
II. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ сохраняет знак числа $f(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0.
III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, также непрерывны в точке x_0 (частное – при условии $g(x_0) \neq 0$);
IV. Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $u = f(y)$ непрерывна в точке $b = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $u = f(\varphi(x)) = F(x)$ непрерывна в точке x_0. Это может быть записано в виде $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f}[\varphi(\mathbf{x})] = \mathbf{f}\left[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(\mathbf{x})\right]$, т.е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу;
V. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

§2. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на некотором промежутке***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *ограниченной на множестве* X, если существуют числа m и M такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in X$.

Число $m_0 = \inf\limits_{x \in X}\{f(x)\}$ называется *точной нижней гранью* функции f, а число $M_0 =$

Число $m_0 = \inf\limits_{x \in X}\{f(x)\}$ называется *точной нижней гранью* функции f, а число $M_0 =$

$\sup\limits_{x \in X}\{f(x)\}$ — *точной верхней гранью* функции f на множестве M. Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* f на множестве X.

Справедливы следующие теоремы:

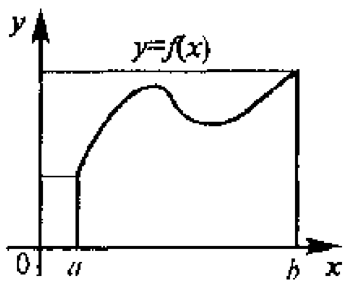
I. Всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

II. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке (см. рис.1а).

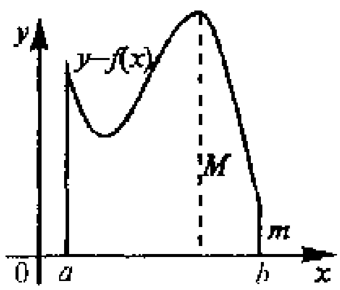
III. ***(Теорема Вейерштрасса).*** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M (см. рис.1б). ($\exists\, c, d \in [a,b]$: $m = f(c) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = f(d) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$)

(Теорема Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f(\xi) = 0$ (см. рис.1в).

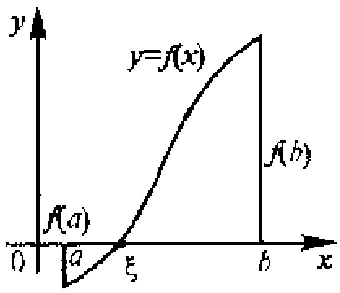
Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a) = A, f(b) = B$ и $A < C < B$, то $\exists\, c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = C$. Другими словами, если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$ (см. рис.1г).



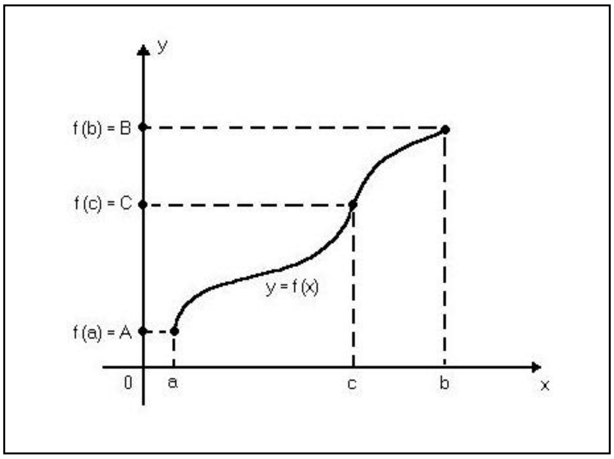
1а)



1б)



1в)



1г)

IV. **Если функция одной переменной $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция $x = g(y)$ определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.**

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на интервале (a,b) (конечном или бесконечном) и если существуют (конечные или бесконечные) односторонние пределы $c = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ $d = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, то обратная функция определена, строго монотонна и непрерывна на интервале (c,d).

§3. Точки разрыва функции и их классификация.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка, в которой нарушается хотя бы одно из трех условий непрерывности называется ***точкой разрыва*** функции.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a. Точка a называется:

1) ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$, если существуют $f(a-0) = f(a+0) = b$, но либо $f(x)$ не определена в точке a, либо $f(a) \neq b$. Если положить $f(a) = b$, то функция $f(x)$ станет непрерывной в точке a, т.е. разрыв будет устранен. Например, для функций $y = x\cos\frac{1}{x}$ и $y = \frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва;

2) ***точкой разрыва I рода*** функции $f(x)$, если существуют конечные пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$, но $f(a+0) \neq f(a-0)$. При этом $f(a)$ может равняться $f(a-0)$ или $f(a+0)$ или не существовать вовсе. Величина $\Delta = | f(a+0) - f(a-0) |$ называется ***скачком*** функции $f(x)$ в точке разрыва.

3) ***точкой разрыва II рода*** функции $f(x)$, если в точке a хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ равен либо $-\infty$, либо $+\infty$ или не существует вовсе.

Теорема. У монотонной функции точки разрыва могут быть только 1-го рода.